CATALOGUE:Des régularités des primios.

Références

(1) J-P Delahaye, Merveilleux nombres premiers. Belin. Pour la science
(2) J.Itard,Les nombres premiers. PUF. Que sais-je 571.
(3) G.Tenenbaum & M.Mendes France. PUF. Que sais-je 571
(4) B.Rittaud.La Recherche 2007(n°409) 58-61.
(5) J-P.Delahaye.Pour la Science (n°390) 85-89.

Le texte projeté avec ce plan n'est qu'à moitié réalisé.
Les lecteurs curieux qui auraient des remarques ou des questions peuvent m'en faire part par « CONTACT » je serai intéressé de les lire.

DES REGULARITES IRREGULIERES DES NOMBRES PRIMIOS (nombres premiers)

APOLOGUE

Mes excuses tout d'abord auprès des curieux qui liront ce texte : j'ai pensé à mes petits enfants qui auraient la tentation de voir ces questions souvent présentées de façon savante ou énigmatique. J'ai cherché à montrer des points de vue de manière assez simple, nullement mystérieuse mais assez attrayante, au sujet des nombres premiers que je dénommerai ensuite « primios » pour abréger. J'ai des souvenirs anciens : on apprend à onze ans à additionner des fractions en les réduisant au même dénominateur ; pour cela on apprend à douze ans que ce dénominateur commun est le plus petit commun multiple (PPCM) que l'on trouve en exprimant tout nombre entier comme égal au produit de la multiplication de « nombres premiers » ou « indivisibles » ou « primios » qui étaient connus et déterminés par Eratosthène il y a plus de 2200 ans. Mais Euclide avait déjà démontré (plus tôt?) que la suite des primios était illimitée (annexe 1) : leur existence était sans doute connue aussi par Aristote et auparavant par Pythagore. Cependant j'ai toujours lu qu'il n'y avait pas de formule permettant de calculer à coup sûr des primios, que des primios,tous les primios ! On ne connait pas de calcul général praticable mais on peut laborieusement en faire la liste aussi loin que l'on veut. Cependant je me souviens d'avoir été surpris, alors que j'étais déjà étudiant, d'apprendre que, 2 et 3 mis à part, TOUS les primios étaient égaux à (6 fois N) +1 ou –1 (avec N nombre entier) . Cela sera expliqué et généralisé , ainsi que d'autres « quasi périodicités » . Une autre découverte curieuse, à 12 ans alors que j'étais « en sixième » , ce fut le nombre 142857, qui donne , en le multipliant par 2 ou 3 ou 4 ou 5 ou 6, les nombres 285714 ou 428571 ou 571428 ou 714285 ou 857142, dont l'écriture décimale utilise les mêmes chiffres dans le même ordre : c'est la période de 1/7 en écriture décimale ; c'est la propriété de certains nombres indivisibles (primios) , comme j'expliquerai plus loin.

PROLOGUE

Les primios en question sont les nombres entiers naturels non divisibles par un autre nombre entier , mais seulement par 1 et par lui-même . En français on les nomme « premiers » ce qui gêne la compréhension parfois , par exemple :

« quels sont , les six premiers nombres , qui ne sont pas premiers , mais qui sont premiers avec six ? » (soient 25; 35; 49; 55; 65; 77) .

Alors on peut distinguer les trois sens du mot « premier » , en utilisant des mots différents :

-premier : nombre qui vient avant les autres,

-primio : nombre entier qui est indivisible (mot spécifique comme en anglais ou en allemand) ; divisible seulement par 1 et par lui-même .

-primavec : nombre qui n'a pas de diviseur commun avec un autre nombre (ils ont un plus grand diviseur commun, PGDC ou PGCD, égal à 1).

On pourra dire alors : « quels sont les six premiers nombres , qui ne sont pas primios , mais qui sont primavec six ? »

Ici on peut rappeler pour être très clair qu'un nombre entier (ou « entier ») N, est divisible par un facteur nombre entier F, si N est le produit de la multiplication de F par Q soit : N =FxQ =F.Q =Q.F (en abrégé), avec Q quotient nombre entier, de N/F, (ou N divisé par F).

La suite bien connue des primios commence par : 1; 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79 etc , car le 1 est évidemment sans diviseur ; le 1 est cependant exclu des primios facteurs effectifs des nombres entiers puisqu'il est un facteur neutre. C'est lié au théorème montrant que tout nombre entier est égal au produit de la multiplication de certains primios, et cela d'une seule façon (annexe 2) car l'ordre des multiplications ne change pas le produit. Ainsi tout entier N est égal à un produit tel que : $N = 2^a.3^b.5^c.7^d.11^e$...etc (où 2^a =2.2.2.2...avec un nombre « a » de facteurs 2 ; éventuellement si a=0 on a $2^0=1$) . Cependant dans une somme , le 1 sera nombre primio.

Une propriété notable des primios est : il faut et il suffit qu'un nombre N n'ait aucun diviseur de 2 à √N inclus, pour qu'il soit primio . En effet, s'il y avait alors un seul diviseur de √N à (N-1) inclus, alors il y en aurait un autre de 2 à √N inclus, qui serait quotient de N par le premier, et réciproquement: cela était connu au moins depuis Fibonacci (Leonard de Pise 1170-1250).

MONOLOGUE

Je sais bien qu'on trouve des livres assez accessibles, et même attrayants,bien documentés sur les primios (ref 1;2;3), avec des citations telles que: « Les mathematiciens ont tenté en vain de découvrir une régularité dans la suite des nombres premiers, et nous avons de bonnes raisons de croire qu'il y a là un mystère que l'esprit humain ne pénètrera jamais » (Leonard Euler,ref 1,p5) . « Essayez donc de prédire les écarts entre les primios successifs ! Nulle règle semble jouer. ». Aussi:« Les tables de nombres premiers montrent un aspect chaotique dont le désordre apparent s'accorde avec des modèles aléatoires ; comment une suite aussi déterminée que celle des nombres premiers peut renfermer une telle part de hasard ! » (ref 3,p3-4). Voyons d'abord l'aspect le plus simple qui fait apparaître des « quasi périodicités » : le « crible d'Eratosthène » (ci-après) est obtenu après les éliminations des multiples des primios successifs, (de 2, puis de 3, puis de 5,etc) ce qui a pour effet d'exclure les nombres qui constituent des suites périodiques, et de garder les primios indivisibles qui sont fortement non périodiques.

Cependant, il leur reste des relations « quasi périodiques » qu'il est intéressant de préciser. D'abord je vois que tout primio P, sauf 1 et 2, est égal , de (P-1)/2 façons , à des sommes d'entiers : P =A+B , avec B < P/2 < A ; alors on a A primavec B (premiers entre eux) toujours ! Cela suggère d'exprimer les primios sous forme de sommes de deux nombres A et B qui sont primavec ; A comporte des facteurs primios qui sont différents de ceux de B, (et cela reste vrai pour A-B). En écrivant D=A±B, où A et B sont primavec divers, on obtiendra une proportion élevée de nombres D qui seront primios, car indivisibles par les primios coefficients de A, ou de B.

Alors dans les cas des suites D=N.A+B, avec N nombre entier croissant, les divers B possibles (primavec A, avec B<A) formeront des suites périodiques qui comprendront <u>TOUS</u> les primios, autres que les diviseurs de A : la proportion de primios sera très élevée pour N petit, diminuant ensuite quand N (et D) croissent, car les diviseurs possibles sont les primios < D, dont le nombre croit avec D : c'est comme dans la suite des N croissants (où A=1 et B=0), et on dénomme cela «la raréfaction des primios ». Dans le cas où A comporte tous les plus petits primios, et que B est primio, ou produit de primios inférieurs à A et primavec A, on obtient par exemple pour D:

-tous les primios sauf 2, avec A=2 et B=1, sont toujours de la forme D_2 =2N+1 et sont tous impairs (de même pour D=2N-1).

-ensuite,tous les primios sauf 2 et 3, avec A=2.3 (soit 2X3=6) sont de la forme connue D_6 =6N +(1ou5) ; c'est équivalent à D_6 =6N ± 1 ; ainsi qu'à D_3 =3(2N+1) ± 2. =6N+3± 2. En effet tous les B possibles sont logiquement alors de la forme A/2 ± B' (où B'=2^N< A/2).

-ensuite, tous les primios sauf 2,3 et 5, avec A=2.3.5 =30 sont de la forme D_{30} =30.N ± B avec B =(1ou7ou11ou13) ; alors tous les D_{30} <49 (carré de 7 qui est le primio suivant 5) sont forcément primios ; pour ces nombres indivisibles par 2ou3ou5, on peut aussi mettre 3 et 5 dans A=3.5=15 et 2 dans B soit D_{15} =15(2N+1) ± 2(1ou2ou4ou7); alors on n'a pas A=15 quasi période, mais plutôt « demi quasi période » ; de même

D_5 =5(6N +ou-1) -ou+6(1 ou 2 ou 3) est équivalent à D_{30} .

-de même dans les exemples divers possibles : ainsi on écrit avec A=3.5.7 soit D_{105}=105(2N+1)±2(1ou2ou4ou11ou13ou16ou.17ou....52) ou bien l'équivalent avec A=2.3.5.7 soit D_{210} =210.N ± (1ou11ou13... primios<104) ; alors tous les D_{210} < 11^2 =121 sont primios. (11 est le primio suivant 7).

-de même avec A=2.5 ,tous les primios,sauf 2 et 5,sont de la forme D_{10} =10.N ±(1ou3) .

-de même avec A=2.3.7,tous les primios sauf 2 et 3 et 7 sont de la forme D_{42} =42.N ± (1ou5ou11ou13ou17ou19).......Etc.

Suivant le procédé d'Eratosthène, la suite indéfinie des primios est facilement obtenue en prenant la suite indéfinie des nombres entiers, puis en éliminant tous les multiples de 2 plus grands que 2; alors le premier nombre restant est 3 qui est indivisible et donc primio; ensuite on élimine tous les multiples de 3 plus grands que 3; ensuite on élimine tous les multiples de 5 plus grands que 5; ainsi on continue avec les primios suivants. Alors il est intéressant d'écrire le « crible d'Eratosthène » de façon à montrer en colonnes les formes D_{15} et D_{30} : (avec les **primios** signalés). Soit :

01 **02** **03** 04 **05** 06 **07** 08 09 10 **11** 12 **13** 14 ┐
15
┌ **29** 28 27 26 25 24 **23** 22 21 20 **19** 18 **17** 16 ┘
30
└ **31** 32 33 34 35 36 **37** 38 39 40 **41** 42 **43** 44 ┐
45
┌ **59** 58 57 56 55 54 **53** 52 51 50 49 48 **47** 46 ┘
60 etc.....

On voit que les primios, (tous les primios, sauf 2 et 3 et 5) sont groupés dans les colonnes en chiffres gras sous 1 ou 7 ou 11 ou 13 ; il apparaît 49 soit 7^2, premier divisible des nombres D_{30} . Ainsi la succession des primios comporte des quasi périodes en nombre visiblement infini , ce qui ne signifie pas qu'ils sont réguliers..

DIALOGUE

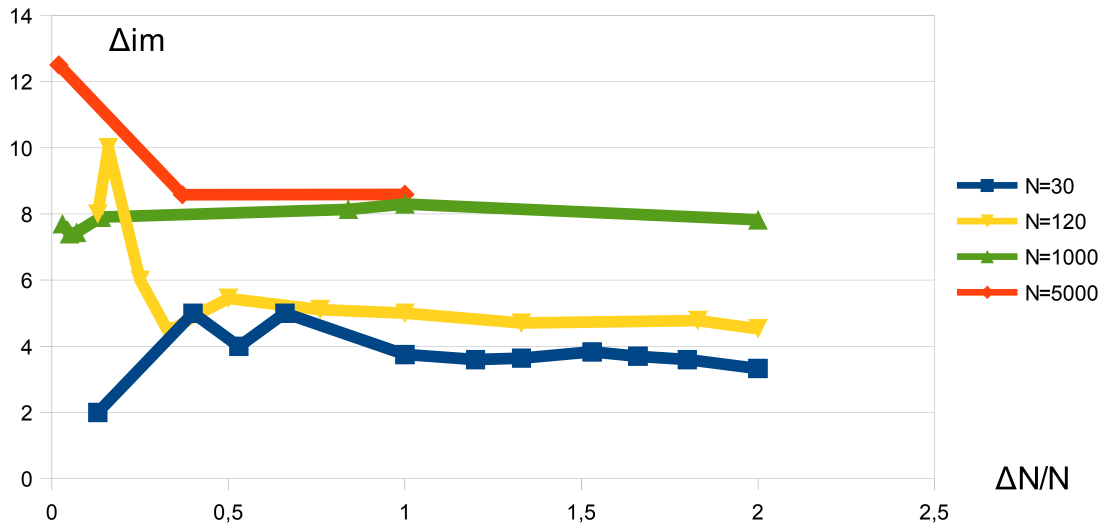
--« C'est bien curieux de s'apercevoir de ces quasi périodicités des primios , mais les écarts entre les primios successifs sont tout de même mystérieusement fantaisistes ; pourrait-on y voir un peu plus clair ? »

--« Pourquoi pas ? Essayons donc d'examiner d'abord ce qu'il en est ; considérons les « écarts élémentaires » entre les primios P_i successifs ($P_{i+1} - P_i = \Delta P_i$) , où P_i serait le i ème P (le i quantième primio). Ces écarts sont très fluctuants entre une valeur minimale de 2, (lorsque

N >3), et une valeur bien inférieure à P_i (à préciser, on verra plus loin).

Alors on peut définir une « différence ou écart moyen au voisinage de N » en faisant des moyennes $\Delta P_{im} = \Delta N/\Delta i$, avec Δi nombre de primios entre : N-ΔN/2 et N+ΔN/2. Ces moyennes dépendent de la largeur de ΔN : si ΔN est voisin de N (soit N ± N/2), on calcule une « moyenne Δm_i » assez régulière , malgré les irrégularités ; si ΔN est trop petit les valeurs ΔP_{im} sont très dispersées, mais si ΔN est trop grand, ΔP_{im} est un peu faible approchant 2N/i(2N); ici i(2N) est le nombre de P entre 0 et 2N. La figure 1 illustre ce comportement qui est compréhensible.

Figure 1 : ΔP_{im}=(nombre de primios entre (N+ΔN/2) et ((N-ΔN/2)/ ΔN) ; pour les cas N=30 et N=120,etc en fonction de ΔN ; on observe autour de ΔN/N= 1 des moyennes assez étroites de ΔP_i ,égales à $\Delta m_i \approx 3{,}70$ (pour N=30) et $\Delta m_i \approx 4{,}85$ (pour N=120) etc.

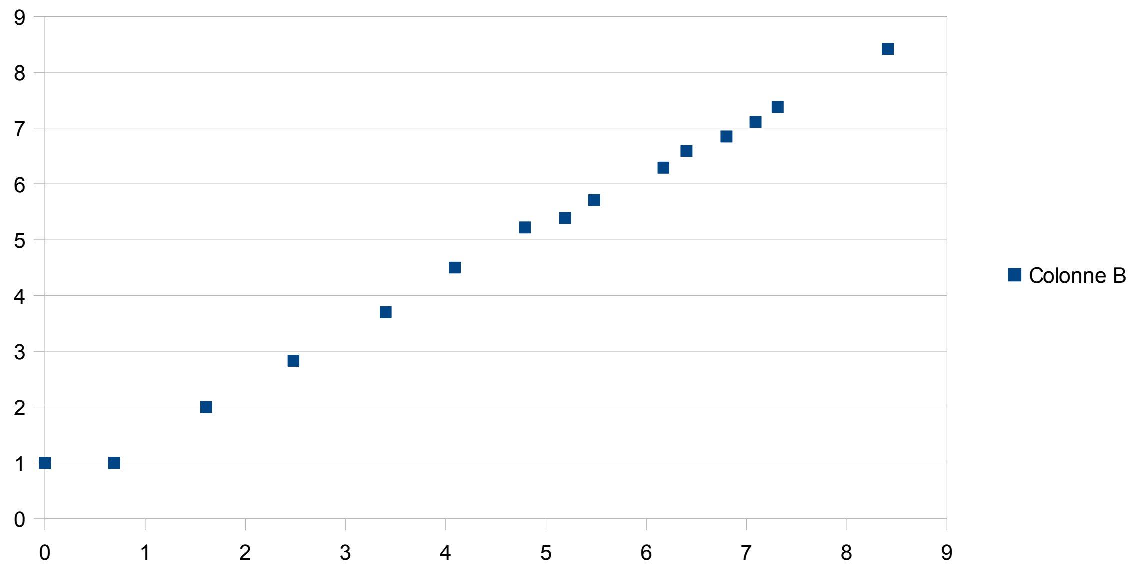


Ici Δm_i est dénommé « écart moyen » ou « différence moyenne». Il est possible de faire la figure 2 représentant des valeurs Δm_i en fonction de Log N (logarithme neperien).

Figure 2 -Les Δm_i moyens , comme il a été déterminé par les moyennes citées figure 1 , sont portés en fonction de Log N jusqu'à N = ; on constate clairement la relation :

$$\Delta m_i = \text{Log } N + C \quad \text{avec } -0{,}8 < C < 0{,}8 \text{ environ}$$

On remarque l'inflexion après le grand écart de P_i : 127-113=14 soit pour Log N près de 4,8. Les deux premiers points correspondent forcément aux écarts entre 1 - 2 et 2 – 3 , ce qui situe la valeur de *C* =près de $\frac{1}{2}$(Log2-Log1) = 0,35. Pour N=60000 à 100000 on a *C* =environ -0,8.



--« Certains nombres entiers N sont donc assez exceptionnels et méritent bien une appellation particulière telle que « premier, ou primio, ou indivisible, (ou P dans ce texte) »; leur fréquence, ou proportion moyenne parmi les entiers, semble bien irrégulière. Elle diminue forcément pour les nombres N croissants , puisque le nombre des diviseurs « primios » possibles ($P<\sqrt{N}$) croit avec N ; et ce nombre de primios croit sans limite, comme l'a démontré Euclide: mais cette proportion diminue comment ? »

--« Il est clair que leur proportion diminue, mais on sait avec Gauss (jeune vers 1795) qu'elle diminue comme 1/Log N environ en moyenne (Log ou Ln ou L est le logarithme neperien) puisque « l'écart moyen » croit comme Log N .Cela a été démontré formellement bien plus tard de façon assez complexe en 1896 par Hadamard et La Vallée-Poussin , puis en 1949 de façon dite élémentaire, par Erdös et Selberg, en 29 pages (ref 3 p 90). »

--« Bon, je ne demande pas d'entrer dans ces calculs ! Mais peut-on essayer de se faire une idée plus simple des raisons de cette variation de la proportion ? »

--« Je ne promets pas que ce soit léger , mais je vais essayer quand même. Précisons que la « proportion » est le rapport entre (le nombre de primios dans un intervalle (de N à N+ΔN)) ,et l'intervalle (ΔN) des entiers. Si l'on appelle F(N) ou i(N) le nombre de primios de 1 à N,(c'est-à-dire : i), alors la proportion de primios « autour de N » s'écrit :

$\Delta F/\Delta N \approx \{ F(N+ \Delta N)-F(N)\} /\Delta N$: ce serait la dérivée de F(N) si F était une fonction continue avec ΔN et ΔF très petits. Alors l'inverse ($\Delta N/\Delta F$) représenterait visiblement « l'écart moyen Δm_i » entre primios successifs autour de N. Or les écarts réels sont très variables comme on l'a vu, et pour observer leur évolution il est nécessaire de faire des moyennes sur plusieurs prims successifs. C'est sans doute ce qu'a fait GAUSS très jeune (vers 1791 ? ou 1795) :nous pouvons le reproduire en faisant des moyennes sur des intervalles choisis, pas trop grands ni trop petits, par exemple comme il est représenté figures 1 et 2 : la relation linéaire apparait clairement »

--« en effet, c'est vraiment net, mais GAUSS a-t-il trouvé une explication ? »

--« il a surement cherché, et trouvé une explication liée aux résultats antérieurs d'EULER mais formellement incomplète ; il ne semble pas avoir publié avant 1849 la proposition $\Delta F/\Delta N \approx 1/\mathrm{Log}N$ qui correspond à la figure 2, et la conséquence $F(n)=\int_1^n (1/\mathrm{Log}\, n)dn$, pour «somme intégrale de 1 à n, de dn/Log n» qui donne $F(n) \approx n/\mathrm{Log}\, n$, partie principale . C'est une approximation assez grossière de F et il en est de meilleures »

--« j'ai compris que tu essayerais de donner une explication élémentaire et je suis intéressé de voir cela ; et aussi une meilleure approximation de F(N) c'est-à-dire i(N) »

--« une chose à la fois :

--« Alors un écart défini K (un peu grand) est impossible entre des P_i petits, mais devient possible pour ds P_i plus grands, puis serait de plus en plus rare pour des P_i très grands ? »

--« Exactement : une valeur particulière K d'écart entre deux P_i successifs apparaît avec une fréquence d'abord croissante puis décroissante pour des P_i croissants ; en effet ces écarts sont de grandeur moyenne croissante quand P croît mais chaque valeur particulière plus fréquente est K=1 jusqu'à P=3,puis K=2 et 4 jusqu'à $P \approx 400$, puis K=6, puis K=30 ...;il apparaît des écarts de plus en plus grands à mesure que la proportion de nombres divisibles croît.(ref 1 p251). Cependant toutes les quasi périodicités se répercutent dans les écarts successifs en s'étirant ; les écarts fréquents suivent alors les quasi périodicités de quasi période plus longue. Les premières quasi périodes possibles sont les nombres A pairs : « 2 » « 2.2=4 » « 2.3=6 » « 2.2.2=8 »« 2.5=10 »« 2.2.3=12 »« 2.7=14 »« 2.3.3=18 » etc.

Or les quasi périodes « plus riches en primios » sont celles obtenues avec les produits des premiers primios A= «2.3=6 » « 2.3.5.=30 » puis « 2.3.5.7=210 » etc (ref 1 p246). Ils fournissent donc les quasi périodes les plus riches en primios comme l'illustre l'exemple du crible donné plus haut. Alors les valeurs de A, produits des premiers primios, (soient 2 ; 4 ; 6 ; 30 ; 210 ; 2310 etc) se sont révélées successivement également les écarts K les plus fréquents (ref 1 p251 hypothèse de Wolf). Ces valeurs de K sont relatives à des quasi périodes plus riches en primios car les valeurs A et B relatives excluent au mieux les diviseurs possibles : cela constitue une explication « heuristique » de l'hypothèse de Wolf qui a affirmé « il n'y a ni théorème ni preuve, seulement des résultats d'ordinateurs, des conjectures et une interprétation des régularités qu'observe un physicien »(ref 1 p252). »

--« Donc je comprends qu'une explication heuristique n'est pas une démonstration ! Ce serait une explication ! »

--« Si l'on veut . Ces valeurs de A sont donc aussi les écarts les plus fréquemment réalisables pour des suites régulières dites ,suites arithmétiques de primios, telle que « 1 ; 3 ; 5 ; 7 » seule suite possible d'écart 2, car tous les autres écarts de 2 sont isolés,comme on le voit dans la quasi période D_{30} . De même pour l'écart de 4 tel que « 3 ; 7 ; 11 ». Les petites suites suivantes d'écart 6 sont sans doute en grand nombre: « 1 ; 7 ; 13 ; 19 » « 5 ; 11 ; 17 ; 23 ; 29 » « 31 ; 37 ; 43 » « 251 ; 257 ; 263 ; 269 ».Chaque écart plus grand d'une suite est toujours , semble-t-il , un multiple d'un produit de Wolf et peut toujours donner des suites plus longues à condition de les trouver parmi des nombres plus grands (ref 4 et 5). Dans ces références on précise que Tao a démontré que cela est possible pour des séquences de longueur aussi longue que l'on veut, mais avec des nombres de dimension assez gigantesque par exemple:

-8 termes avec 11+ 5 763.210.n(n=0 à 7) ou bien..

-10 termes avec 199+ 210.n(n=0 à 9)etc...(divers exemples)

-24 termes avec 468 395662 504823 + 205 619.(23#).n où n=0 à 23) et où (23#) = 23.19.17.13.11.7.5.3.2 soit plus de 223.10^6. Cette curiosité ne fournit pas de méthode de détermination de ces séquences.: il faut les chercher avec flair ! »

--« Il me semble que les formes A.N+B sont vraiment importantes pour les propriétés de leurs primios ! »

--« Les formes A.N+B sont des progressions arithmétiques étudiées par Lejeune-Dirichlet puis par Kronecker et par Landau qui ont montré que pour une valeur de A, on a les primios également répartis (en moyenne) entre les diverses suites arithmétiques obtenues avec les différentes valeurs de B,(primavec A) ce qui n'est pas évident, mais compréhensible.

Les quasi périodicités décrites sont en relation avec les curieuses figures décrites par Ulam et dénommées « spirales d'Ulam » qui seront commentées au chapitre Iconologue. » : en disposant une suite de N successifs en spirale carrée autour d'un carré initial sur une grille en damier,on obtient des figures avec des milliers de nombres (ou bien plus) qui montrent des séquences surprenantes de nombres prims alignés, parallèles aux diagonales du carré initial. En effet les nombres pairs se trouvent sur des cases en damier, et les impairs (dont les primios) sur les « cases blanches » intercalées :certains espaces sont très pauvres en primios ; certains alignements en diagonale sont assez riches .Ces curiosités sont partiellement compréhensibles et seront commentées sous le titre « iconologue »

--« Il est clair que leur proportion diminue, mais on sait avec Gauss vers 1795 qu'elle diminue comme 1/Log N environ en moyenne (Log ou Ln ou L est le logarithme neperien) . Alors « l'écart moyen » croit comme Log N .Cela a été démontré bien plus tard de façon assez complexe en 1896 par Hadamard et La Vallée-Poussin , puis en 1949 de façon dite élémentaire, par Erdös et Selberg, en 29 pages (ref 3 p 90). »

--« Bon, je ne demande pas d'entrer dans ces calculs ! Mais peut-on essayer de se faire une idée plus simple des raisons de cette variation de la proportion ? »

--« Je ne promets pas que ce soit léger , mais je vais essayer quand même. Précisons que la « proportion » est le rapport entre (le nombre de primios dans un intervalle (de N à N+ΔN)) ,et l'intervalle (ΔN) des entiers. Si l'on appelle F(N) ou i(N) le nombre de primios entre 1 et N, (c'est-à-dire : i), alors la proportion de primios « autour de N » s'écrit:

$\Delta F/\Delta N \approx \{ F(N+ \Delta N)-F(N)\} /\Delta N$: ce serait la dérivée de F(N) si F était une fonction continue avec ΔN et ΔF très petits. Alors l'inverse (ΔN/ΔF) représenterait visiblement « l'écart moyen Δm_i » entre primios successifs autour de N. Or les écarts réels sont très variables comme on l'a vu, et pour observer leur évolution il est nécessaire de faire des moyennes sur plusieurs prims successifs. C'est sans doute ce qu'a fait GAUSS très jeune (vers 1791 ? ou 1795) :nous pouvons le reproduire en faisant des moyennes sur des intervalles choisis, pas trop grands ni trop petits, par exemple comme il est représenté figures 1 et 2 : la relation linéaire apparaît clairement »

--« en effet, c'est vraiment net, mais GAUSS a-t-il trouvé une explication ? »

--« il a surement cherché, et trouvé une explication liée aux résultats antérieurs d'EULER mais formellement incomplète ; il ne semble pas avoir publié avant 1849 la proposition $\Delta F/\Delta N \approx 1/\text{Log}N$ qui correspond à la figure 2, et la conséquence $F(n)=\int_1^n (1/\text{Log}\ n)dn$, pour «somme intégrale de 1 à n, de dn/Log n» qui donne $F(n) \approx n/\text{Log}\ n$, partie principale . C'est une approximation assez grossière de F et il en est de meilleures »

--« j'ai compris que tu essayerais de donner une explication élémentaire et je suis intéressé de voir cela ; et aussi une meilleure approximation de F(N) c'est-à-dire i(N) »

--« une chose à la fois :

Certains nombres entiers N sont donc assez exceptionnels et méritent bien une appellation particulière telle que « premier, ou primio, ou indivisible, (ou P dans ce texte) »; leur fréquence, ou proportion moyenne parmi les entiers, semble bien irrégulière. Elle diminue forcément pour les nombres N croissants , puisque le nombre des diviseurs « primios » possibles ($P<\sqrt{N}$) croit avec N ; et ce nombre de primios croit sans limite, comme l'a démontré Euclide: mais cette proportion diminue comment ? »

Il est clair que leur proportion diminue, mais on sait avec Gauss vers 1795 qu'elle diminue comme 1/Log N environ en moyenne (Log ou Ln ou L est le logarithme neperien) . Alors « l'écart moyen » croit comme Log N .Cela a été démontré bien plus tard de façon assez complexe en 1896 par Hadamard et La Vallée-Poussin , puis en 1949 de façon dite élémentaire, par Erdös et Selberg, en 29 pages (ref 3 p 90). »

Bon, je ne demande pas d'entrer dans ces calculs ! Mais peut-on essayer de se faire une idée plus simple des raisons de cette variation de la proportion ? »

Annexe 1- Infinité des primios suivant Euclide.